Generalizaciones al teorema π de Buckingham con algunas aplicaciones [1]

Andrés Martínez de Azagra Paredes♦, Valentín Pando Fernández♦ & Jorge del Río San José•

♦ *Escuela Técnica Superior de Ingenierías Agrarias*
Universidad de Valladolid
Avenida de Madrid, 44
34004 Palencia (España)
Tel: +34 979 108300
amap@iaf.uva.es
vpando@eio.uva.es

• *Junta de Castilla y León*
Servicio Territorial de Medio Ambiente
Duque de la Victoria, 5, 3ª Planta
47001 Valladolid (España)
Tel: +34 983 411088
riosanjo@jcyl.es

Resumen

Con el presente trabajo se generaliza el teorema π de Buckingham a través de un corolario. Una generalización mayor del aludido teorema conduce al axioma de las conjeturas razonadas. Se plantea la hipótesis de que el razonamiento humano se rija por el mencionado axioma. Conforme a esta hipótesis, nuestra mente opera como una función de funciones que va transformándose (o cambiando de perspectiva) según el transcurrir del tiempo. Entre las funciones a considerar aparece un nuevo tipo, que hemos denominado funciones divagada. Se describe la génesis de una función divagada a partir de neuronas divagantes. Así mismo, se plantea la función del Mundo y se analiza su constitución para finalizar con una serie de consideraciones de índole filosófica.

Palabras clave: monomios, análisis dimensional, razonamiento humano, neuronas divagantes

1. Introducción

El teorema π de Buckingham (véase el anexo I) encierra un cambio de perspectiva en la observación de un fenómeno físico, permitiendo su simplificación al reducir el número de variables implicadas en él (símbolo: *R!*, de reducción). Se llega por análisis dimensional a un número de monomios sin dimensiones que describen el fenómeno físico de partida con la misma precisión que el planteamiento inicial, sólo que con menos variables.

$$F(a,b,c,d,........)=0 \qquad \xrightarrow{R!} \qquad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.........)=0$$

con F y φ funciones, a, b, c, d variables dimensionales y π_1, π_2 , π_3 variables adimensionales.

[1] Trabajo dedicado a la escuela pitagórica

Se trata de un procedimiento preciso y estricto a la hora de cambiar de perspectiva: cada monomio (π_i) se obtiene a partir del producto de unas variables de referencia elevadas a unos exponentes que hagan al monomio adimensional (anexo I). El procedimiento resulta plenamente satisfactorio pero puede parecer innecesariamente estricto, al ser la función F una función genérica y desconocida. Dicho de otra manera: cabe concebir otros cambios de perspectiva diferentes sin necesidad de acudir al procedimiento rígido de los monomios adimensionales que propone el teorema.

2. Teorema π de Buckingham generalizado

2.1. Intuición de su existencia. Evidencia de su posible generalización

La primera idea que conduce intuitivamente a la generalización del teorema ya ha sido enunciada: Al ser F una función genérica no parece necesario tener que realizar el cambio de perspectiva de una forma tan estricta como la descrita por Buckingham.

De hecho, en un artículo sobre infiltración publicado en la revista Ecología (Martínez de Azagra *et al*., 2006) no se aplica el teorema π de Buckingham, sino una noción del mismo consistente en hacer intervenir a todas las variables conectando todas entre sí a través de los coeficientes (o monomios) sin que ninguna quede aislada, ajena del resto. Esta solución se obtiene directamente sin utilizar el procedimiento matemático concreto definido por Buckingham en su teorema, lo que sugiere la posibilidad de generalizarlo.

Sean tres investigadores (A, B, y C) que se plantean el mismo fenómeno físico para su descripción (resolución) llegando a tres funciones de partida genéricas y diferentes (F_A, F_B y F_C) , siendo los tres planteamientos correctos y completos. El primero consigue reducir el número de variables aplicando el teorema π de Buckingham; el segundo no llega a reducir su problema y el tercero consigue la reducción sin aplicar el teorema π de Buckingham estricto pero sí una noción del mismo. Pues bien: esta situación evidencia la posible existencia de generalizaciones al teorema. La pregunta inmediata que surge es: ¿qué otras formas cabe concebir para cambiar de perspectiva eficazmente sin tener que acudir a la intuición, como hace el físico C?

A plantea:

$$F_A(a,b,c,d,........) = 0 \qquad \xrightarrow{R!} \qquad \varphi_A(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.........) = 0$$

B plantea:

$$F_B(f_1(a), f_2(b), f_3(c,d),........) = 0 \qquad \xrightarrow{?} \qquad \textit{No llega a reducir el problema.}$$

C plantea:

$$F_C(a,b,c,f_4(d),........) = 0 \qquad \xrightarrow{R!} \qquad \varphi_C(\pi_1^*,\pi_2^*,\pi_3,.........) = 0$$

siendo $f_i(x, y,....)$ funciones genéricas.

El físico C llega a la solución reducida sin poder aplicar el teorema π de Buckingham estricto, pero sí una noción del mismo. Luego deben existir generalizaciones al teorema π de Buckingham.

2.2. Nuevos cambios de perspectiva propuestos

Se propone aplicar el procedimiento de obtención de monomios adimensionales utilizando magnitudes de referencia cambiantes (sustituyendo las magnitudes físicas iniciales por otras nuevas en mitad del proceso de cálculo). Es decir: El método consiste en aplicar el teorema parcialmente, obteniendo ciertos monomios π_1, π_2, π_3 llegando a una función intermedia: $\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \chi, \delta, \varpi, ...) = 1$, para después volver a aplicar el teorema con χ, δ, ϖ como nuevas magnitudes físicas de referencia (véase el anexo II).

Notas:

1) Entre las magnitudes físicas de partida puede figurar simplemente el tiempo (t) además del espacio (x, y, z, …), tal y como nos ocurre a nosotros en la vida.

2) El problema planteado y a resolver (cambiando de perspectiva) no tiene por qué ser de índole física. Puede tratarse de un problema metafísico o matemático para el cual el procedimiento del análisis dimensional propuesto por Buckingham no ayuda a resolver. El cambio de perspectiva debe realizarse mediante cambios de ejes de referencia o mediante transformadas, que convendrá ir concretando en el futuro.

Pregunta: ¿Qué propiedades tienen que tener las funciones internas $f_i(x, y,....)$ para poder aplicar un teorema π de Buckingham generalizado?

Como planteamiento general estas funciones podrán ser de cuatro tipos:

$f_i(x,y,z \ldots)$ $\rightarrow$ funciones matemáticas clásicas (operadores, etc.)
$f_i(x,y,z \ldots)$ $\rightarrow$ funciones de distribución
$f_i(x,y,z \ldots)$ $\rightarrow$ funciones neuronales (con aprendizaje / memoria)
$f_i(x,y,z \ldots)$ $\rightarrow$ funciones divagada (un salto intuitivo, imprevisible, en total libertad, erróneo o acertado). Véase el anexo III en donde se describe a una neurona divagante.

Conviene señalar, que en un planteamiento más general, las propias funciones del problema (simbolizadas por F, F_A, F_B, F_C) pueden pertenecer a cualquiera de los cuatro tipos señalados.

Junto a la pregunta anterior (que no es objeto de estudio en este trabajo) surge también la siguiente, que ya hemos apuntado con anterioridad: ¿Cómo cambiar de perspectiva eficazmente? La respuesta a esta pregunta no es inmediata, desde luego. La Ciencia la debe ir respondiendo con sus avances poco a poco. ¡Demos tiempo al tiempo!

3. Axioma de las conjeturas razonadas

Si el problema planteado incluye únicamente funciones internas de los tres primeros tipos podrá existir un teorema π de Buckingham generalizado que simplifique la cuestión. Si, además, incorpora alguna función divagada, es el axioma de las conjeturas razonadas quien puede resolver el problema. Para cambiar de perspectiva hemos de acudir al axioma de las conjeturas razonadas, que podemos enunciar así:

Ante cualquier situación siempre se puede cambiar de perspectiva. Dicho de una manera más positiva (aunque restrictiva): Ante un problema siempre se puede cambiar de perspectiva razonadamente hasta llegar a entrever su solución. Sin embargo, el cambio de perspectiva también puede conducirnos a problemas más complejos, es decir: no siempre conseguiremos una reducción del problema (símbolo: *R!*) sino que podemos estar ampliando la complejidad inicial del planteamiento (símbolo: *A!*)[2].

$$F(a,b,f_1(c,d),f_2(e)........)=1 \quad \xrightarrow{R!\ ó\ A!} \quad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.........)=1$$

siendo $f_i(x,y,....)$ funciones matemáticas, funciones de distribución, funciones neuronales y/o funciones divagada.

Este axioma es indemostrable pero a la vez evidente por lo que no requiere de demostración. Puede parecer a primera vista una perogrullada pero tiene su interés, pues encierra al menos una buena parte del razonamiento del cerebro humano (si no todo él) y el de muchos animales. El cambio de perspectiva que postula ocurre en nuestro cerebro tanto voluntaria como involuntariamente con el transcurso del tiempo.

> Verbigracia: Un gato de caza piensa: "Tengo ganas de almorzar. Aquí no veo nada de interés. Voy a cambiar de lugar, de perspectiva, sigilosamente, para tratar de localizar un ratón que llevarme a la boca esta mañana."

Las conjeturas pueden estar bien o mal razonadas (pues pueden deberse a cambios erróneos, a funciones divagada equivocadas), de manera que son en gran medida imprevisibles. Hay en ellas un importante grado de incertidumbre. En el pensamiento humano (vg.: salir por peteneras) pero también en las transformaciones del Mundo (las físicas y las inmateriales) las hay. Su evolución concreta no es predecible. Sólo lo es a grandes rasgos, pero en el detalle probablemente no.

El axioma enunciado, como cualquier axioma, no requiere de demostración (en este caso concreto y entre otras razones, por encerrar en sí mismo divagadas). No ocurre lo mismo con los teoremas previos que conducen a él, que habrán de ser demostrados uno a uno.

La forma más sencilla de expresar este axioma es con palabras, pues no en vano las palabras (el lenguaje) son la expresión del funcionamiento del cerebro humano.

[2] Se sobrentiende que el cambio de perspectiva también pueda mantener el nivel de complejidad.

Se trata de un axioma bastante impreciso, pero es que estamos tratando de describir el funcionamiento de la mente humana, que en modo alguno es precisa o predecible.

4. Aplicación del axioma de las conjeturas razonadas

Sea $F_M(..) = 1$ la función del Mundo.

Aplicando el axioma de las conjeturas razonadas puedo transformar el problema en otro equivalente:

$$F_M(..) = 1 \xrightarrow{R!\ \acute{o}\ A!} \varphi_M(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...\pi_\infty) = 1$$

Los monomios (π_i) en este caso ya no tienen que ser adimensionales (como en el teorema π de Buckingham) sino que son entes (entidades) con dimensiones. Entre ellos, entre los π_i, figuramos nosotros con – previsiblemente – catorce dimensiones: siete debidas a nuestras magnitudes físicas (masa, longitud, tiempo, temperatura, intensidad de corriente eléctrica, intensidad luminosa, y cantidad de materia) y otras tantas debido a nuestras magnitudes anímicas[3] (por razones de simetría conjeturamos ese número de dimensiones anímicas, sin poderlo demostrar).

Por curiosidad cabe plantearse ahora, quiénes fueron Arquímedes, Newton o Einstein, por citar a tres Genios de la Humanidad. Pues bien: Fueron monomios (entes) que aplicaron el axioma de las conjeturas razonadas de manera eficiente, llegando a entrever soluciones sencillas a fenómenos físicos que eran con anterioridad irresolubles o desconocidos. Un cambio acertado de perspectiva (una idea feliz, una intuición, una divagada) les permitió reducir el problema planteado (*R!*) y enunciar sus principios, leyes o teorías.

Así mismo aparecen en la función del mundo entes (π_i) adimensionales tanto materiales (las partículas elementales de la materia y de la antimateria) como inmateriales o conceptuales (los números de las matemáticas, los monomios adimensionales de la física, etc.). Igualmente, la función del Mundo (φ_M) incluye entes de una, dos, tres y más dimensiones. A aquéllos entes con más dimensiones que nosotros se les puede considerar superiores al hombre. Su existencia está por comprobar pero a nivel conceptual no existe ninguna razón para omitirlos. Es más, la propia función del Mundo parece tener infinitas dimensiones, pudiendo considerarse como Ser Supremo (en una concepción panteísta).

5. Principio elemental del cambio

Todo y cualquier parte del Universo cambian, se transforman haciéndose o más complejos o más sencillos con el paso del tiempo. Nada permanece inmutable. Todo cambia, todo está en movimiento, volviéndose más complejo o más simple en la

[3] Existencia (ser o no ser), consciencia (capacidad de percibirse y de percibir un entorno), ánimo (ilusión, ganas de vivir), inteligencia, conocimientos, ética y trascendencia pudieran constituir un sistema de magnitudes fundamentales de índole anímica.

transformación, que puede ser desde súbita a extremadamente lenta. Expresado matemáticamente:

$$\varphi_{M1}(\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \pi_\infty) = 1 \quad \xrightarrow{R!\ ó\ A!} \quad \varphi_{M2}(\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots\ldots, \pi_\infty^*) = 1$$

El funcionamiento de nuestra mente no escapa a este principio. De hecho, es lógico pensar que nuestra mente suponga un caso particular del funcionamiento del Universo y que se rija bajo los mismos principios que el Mundo, como parte integrante de Él.

Insistimos: La función del Mundo ($\varphi_M(\pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots\ \pi_\infty) = 1$) incluye entes (nosotros mismos, es decir: algunos π_i) que aplican el axioma de las conjeturas razonadas (en este caso: conscientemente) de manera que funcionan por un principio contenido en las transformaciones del Mundo, razón por la que puede admitirse que están hechos a imagen y semejanza del Universo. Ahora bien: una diferencia notoria estriba en el hecho de que nuestros cambios de perspectiva (o transformaciones) son finitos en el tiempo mientras que el Mundo sí parece ser eterno.

Las transformaciones (o la evolución) del Mundo (como la de nuestros cerebros) siguen unas leyes, muchas de las cuales están por descubrir. Son leyes físico-matemáticas, leyes de azar, leyes memorísticas y leyes caóticas (a semejanza de las establecidas en la definición del axioma de las conjeturas razonadas).

Para la obtención de la función del Mundo hemos partido de una expresión con puntos suspensivos en su interior, incapaces – inicialmente – de esbozar su contenido. Mediante una transformación mental innecesaria (pues podríamos haber escrito la función del Mundo directamente ($\varphi_M(\ldots, \pi_i, \ldots) = 1$), sin el paso previo con los puntos suspensivos), hemos llegado a φ_M. Sin embargo, esta transformación (o cambio de perspectiva) nos ha ayudado a interpretar los entes del interior de la función. Facilitamos el proceso mental de comprensión utilizando el axioma de las conjeturas razonadas, que no es sino un modelo del funcionamiento del razonamiento humano, como ha quedado comprobado.

6. El Big Bang y las Creencias Religiosas

El Mundo se ha transformado y se sigue transformando. No sabemos cómo se transforma (en qué sentido, según qué leyes) pero se transforma por el principio del cambio. Desde nuestra perspectiva (desde nuestro pensamiento) podemos concebir transformaciones diferentes de la actual, tratando de entrever la evolución del Universo. Algunos cosmólogos actuales plantean que el Universo es eterno y que tiene unas transformaciones cíclicas que lo llevan a concentrarse todo Él en un punto para después explotar (Big Bang) iniciando una nueva expansión y formación de un Universo extenso. Cada Big Bang viene a constituir un latido del Mundo. Conforme a esta teoría, los agujeros negros son aprendices del Big Bang, en los que se están concentrando infinitos entes (π_i, incluida la luz).

Siendo así, existe una transformación que simplifica el Mundo enormemente, pasando de infinitos monomios (π_i) a un único monomio π_M, en donde se halla todo el Universo concentrado en un punto.

$$\varphi_{Mj}(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_\infty) = 1 \xrightarrow{R!} \varphi_{Mk}(....., \pi_i^*, ...) = \varphi_M(\pi_M) = 1$$

$$\varphi_M(\pi_M) \xrightarrow{A!} \varphi_{Mi}(..., \pi_i, ...) \xrightarrow{R!\ o\ A!} ...... \xrightarrow{R!\ o\ A!} \varphi_{Mj}(..., \pi_i^*, ...) \xrightarrow{R!} \varphi_M(\pi_M)$$

El Mundo material se llega a simplificar tanto que se concentra en un único lugar, en un punto, albergando toda la materia y energía en ese punto de infinitas dimensiones y adimensional a la vez: π_M. Esta situación es – al parecer – muy inestable por lo que se produce una gran explosión (un Big Bang), una transformación brusca que genera un nuevo Universo expandido.

Conforme a esta teoría cósmica, toda la materia (también nosotros) migra finalmente hacia un agujero negro para terminar nuevamente formando parte de π_M, que vuelve a explotar.

En una primera lectura no queda espacio para Dios[4] en este modelo universal. Sin embargo, esta apreciación no es cierta. Siempre queda un resquicio amplio donde insertar a un Ser Supremo en este Mundo. En efecto: apetece pensar que las propiedades anímicas subsisten tras la muerte y que migran a otro polo del Universo, a π_D, en completa paz y armonía. Muchas religiones actuales mantienen esta creencia de una u otra manera, no pudiendo la Ciencia aseverar o negar su validez, de momento.

Es cierto: se puede concebir un polo opuesto a π_M (es decir: ubicuo) en donde se concentre todo el Mundo anímico (o espiritual) en perfecto equilibrio. A este ente con infinitas dimensiones espirituales lo podemos simbolizar por π_D. Se trata de la Paz Suprema, de la Paz Universal, que es infinitamente estable, el Eterno Presente. Un mundo anímico paralelo al material se puede estar rigiendo por unas leyes similares a las físicas, leyes que el hombre está empezando a descubrir para su Ciencia pero que dista mucho de conocer en profundidad.

A su vez, si a todo fenómeno físico real le suponemos un fenómeno físico imaginario que sea simétrico, π_D tendrá su simétrico imaginario, que simbolizamos por $\sqrt{-\pi_D}$, y que se corresponde con el diablo, una paz ficticia o irreal, pero que resulta atractiva siendo en realidad falsa, un espejismo. Igualmente, π_M tiene a $\sqrt{-\pi_M}$ como simétrico imaginario, noción que se corresponde con el infierno.

7. Paradoja aparente

No conviene concluir este trabajo sin apuntar una paradoja implícita del mismo: Se ha deducido un axioma (el de las conjeturas razonadas) a partir de un teorema, es decir: se ha seguido el camino inverso al de las deducciones formales de las Matemáticas. ¿Cómo es eso posible?

La respuesta la podemos encontrar en el propio teorema de Buckingham (¡como no puede ser de otra manera!): Al igual que todos los teoremas, el teorema Pi es fruto del pensamiento humano pero –a su vez y en este caso tan especial– éste constituye un modelo sencillo sobre la forma de pensar que tiene el propio ser humano. Este bucle hace al teorema mucho más potente de lo que en apariencia es, convirtiéndolo, en el fondo, en el axioma de las conjeturas razonadas. Nos surge con ello una duda sin importancia: ¿Habremos aportado algo a la Ciencia?

[4] y todos sus sinónimos

Anexo I: Teorema π de Buckingham (1914)

El teorema π de Edgar Buckingham[5] trata sobre el aburrido análisis dimensional de las fórmulas físicas. Sin embargo, es un teorema atractivo, sorprendente, casi mágico para algunos e incomprensible para muchos, que se quedan perplejos al verlo aplicar. Como todo teorema, es fruto del pensamiento humano pero –a su vez y en este caso– constituye un modelo sencillo sobre la forma de pensar que tiene el propio ser humano. Es esto lo que le confiere un interés muy especial y lo que le hace desconcertante. Enunciémoslo y demostremos su validez:

En un sistema de medida que contenga m magnitudes fundamentales, consideremos una función expresiva de un fenómeno físico en el que intervienen en total r parámetros Q, representativos de otras tantas magnitudes, sean éstas fundamentales o derivadas:

$$f(Q_1, Q_2, \ldots\ldots\ldots, Q_r) = 0 \qquad [1]$$

Sean a_{j1}, a_{j2}, ……, a_{jm} las dimensiones de Q_j respecto a las magnitudes fundamentales:

$$[Q_j] = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \ldots\ldots & a_{jm} \end{bmatrix}.$$

Sea $n \leq m$ la característica de la matriz $\|a_{jk}\|$.

Entonces, la ecuación [1] es reducible a otra equivalente, de la forma:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \ldots\ldots, \pi_{r-n}) = 0, \qquad [2]$$

siendo π_1, π_2, …, π_{r-n}, $(r–n)$ monomios adimensionales formados por productos de potencias de las Q variables, tomados como se indicará más adelante.

Formemos la matriz de los coeficientes:

$$\|a_{jk}\| = \left|\begin{array}{l}
a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{1n} \,|\ldots\ldots\ldots \quad a_{1m} \\
a_{21} \quad a_{22} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{2n} \,|\ldots\ldots\ldots \quad a_{2m} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1} \quad a_{n2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{nn} \,|\ldots\ldots\ldots \quad a_{nm} \\
-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{j1} \quad a_{j2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{jn} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{jm} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{r1} \quad a_{r2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{rn} \quad \ldots\ldots\ldots \quad a_{rm}
\end{array}\right|$$

[5] Los trabajos de los físicos Vaschy (1892) y Riabouchinski (1911) pueden considerarse pioneros y precursores del teorema Pi. Por otro lado, el matemático Federman (1911) demuestra dicho teorema pero sin encontrar aplicación práctica a su hallazgo.

Existe al menos un menor no nulo de orden *n*. Este menor, permutando convenientemente los índices, puede ser el indicado en la matriz. La fila *j*, una cualquiera de las (*r*–*n*) restantes, es combinación lineal de las filas de dicho menor, de forma que:

$$a_{jk} = \lambda_{j1} \cdot a_{1k} + \lambda_{j2} \cdot a_{2k} + ... + \lambda_{jn} \cdot a_{nk} \,. \qquad [3]$$

De aquí se deduce que el producto

$$\pi_j = Q_j \cdot Q_1^{-\lambda_{j1}} \cdot Q_2^{-\lambda_{j2}} ....Q_n^{-\lambda_{jn}} \qquad [4]$$

es adimensional. Despejando Q_j se obtiene:

$$Q_j = \pi_j \cdot Q_1^{\lambda_{j1}} \cdot Q_2^{\lambda_{j2}} ....Q_n^{\lambda_{jn}} \qquad [5]$$

Sustituyendo en [1]: $f(Q_1, Q_2, ..., Q_r) = 0$ obtendremos:

$$f(Q_1, Q_2, ..., Q_r) = F(Q_1, Q_2, ...Q_n; \pi_1, \pi_2, ..., \pi_{r-n}) = 0 \,. \qquad [6]$$

Si efectuamos dentro del mismo sistema de dimensiones un cambio de unidades, la función *F*(…..) ha de conservar en el nuevo sistema la misma expresión [6]. Es decir, en el nuevo sistema ha de ser:

$$F(Q_1^*, Q_2^*, ...Q_n^*; \pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_{r-n}^*) = 0 \qquad [7]$$

Pero los π_i son iguales a los π_i^* por ser adimensionales, y como $Q_i \neq Q_i^*$, por tener dimensiones, se deduce que en la función *F*(…..) no pueden intervenir las variables *Q* que necesariamente habrán sido eliminadas al efectuar la sustitución [5] en [1]; es decir, que dicha ecuación *F* ha de ser de la forma:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{r-n}) = 0 \qquad [8]$$

con lo que el teorema queda demostrado.

Conforme a lo demostrado, en cada monomio π_j entran (*n*+1) factores formados por los *n* correspondientes al menor no nulo y uno de los (*r*–*n*) restantes, con lo que la forma práctica de aplicar el teorema queda claramente indicada. Conviene señalar que en la demostración figura π_j con exponente unidad (ecuación 4) cuando en realidad este exponente puede ser cualquiera (π_j^{-1}, π_j^{2}, etc.), puesto que cada monomio π_j puede ir elevado a cualquier número dentro de la función.

Tanto por su utilidad práctica en el ámbito de la Física como por su enorme atractivo matemático (y hasta filosófico), el teorema π de Buckingham ha sido objeto de numerosos estudios y revisiones. Al respecto, merecen citarse los excelentes artículos de Görtler (1975) y de Pobedrya & Georgievskii (2006). También conviene citar los trabajos de Martinot-Lagarde (1948), Birkhoff (1950), Boyling (1979) y Curtis *et al*.

(1982), en donde el lector puede encontrar diferentes desarrollos matemáticos que conducen a la demostración del teorema.

El teorema π de Buckingham es sólo aplicable para simplificar la perspectiva de fenómenos físicos; por el contrario, el axioma de las conjeturas razonadas puede aplicarse a todo tipo de fenómenos (matemáticos, físicos, químicos, biológicos, médicos, informáticos, filosóficos, religiosos, ….).

Anexo II: Corolario al teorema π de Buckingham

Dada la función $F_1(Q_1, Q_2, ..., Q_r) = 1$ a la que se puede aplicar el teorema π de Buckingham, esta función $F_1(\ldots)$ se puede transformar en una función equivalente $F_2(f_1(Q_1), f_2(Q_2), ..., f_n(Q_n), Q_j, ..., Q_r) = 1$, siendo $f_m(Q_m) = \pi_m = Q_m \cdot Q_i^{\alpha} \cdot Q_k^{\beta} \cdot ... \cdot Q_l^{\eta}$ un monomio adimensional cualquiera, convirtiendo tantas magnitudes Q_m en otros tantos monomios adimensionales como se desee, con tal de que se sigan satisfaciendo las condiciones de aplicación del teorema en la función equivalente $F_2(\pi_1, ..., \pi_n, Q_j, ..., Q_r)$ con las magnitudes Q_j a Q_r restantes.

En efecto: Si la función $f_m(Q_m) = Q_m \cdot Q_i^{\alpha} \cdot Q_k^{\beta} \cdot ... \cdot Q_l^{\eta}$ no fuese una transformación lícita para el problema inicial tampoco lo sería el procedimiento usado en el propio teorema π de Buckingham, que es coincidente con el planteado con la función $f_m(Q_m)$.

Este corolario permite una gran flexibilidad en la obtención de monomios adimensionales lo que puede facilitar su posterior interpretación física.

Ejemplo de aplicación:

Considerando todas las magnitudes (o variables) que pueden estar interviniendo en la infiltración, Martínez de Azagra *et al.* (2006) concluyen que ésta se deja expresar como una función genérica de todas ellas (véase la figura 1). En concreto:

$$F_1(a, b, c, d_0, d_1, \zeta, c_h, \rho, \gamma, \mu, \varepsilon, \sigma, k_0, k_1, f, \psi) = 1 \quad [9]$$

siendo: a, b, y c las longitudes de referencia del suelo considerado, según unos ejes x y z {L}

- d_o la longitud de poros en la superficie del suelo (= diámetro característico en el horizonte superior) {L}
- d_1 el diámetro característico en el segundo horizonte {L}
- ζ la tortuosidad {L}
- c_h el contenido de humedad del suelo {L}
- ρ la densidad absoluta del agua {$M \cdot L^{-3}$}
- γ el peso específico del agua {$M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}$}
- μ el coeficiente de viscosidad dinámico {$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$}
- ε el módulo de elasticidad volumétrica {$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$}
- σ el coeficiente de tensión superficial {$M \cdot T^{-2}$}
- k_0 la permeabilidad del horizonte superficial {$L \cdot T^{-1}$}
- k_1 la permeabilidad del horizonte subyacente {$L \cdot T^{-1}$}
- f la capacidad de infiltración del suelo {$L \cdot T^{-1}$}
- ψ el potencial hídrico {$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$}

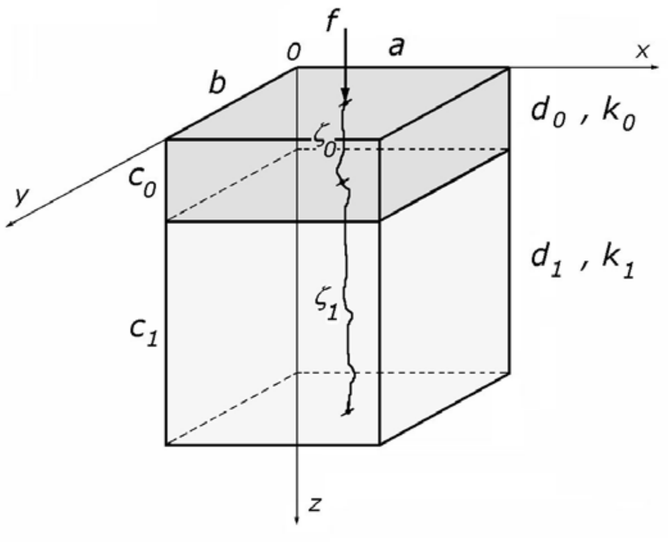

Figura 1. Representación esquemática del perfil de un suelo en el que se señalan las magnitudes geométricas (a, b, c_j, ζ_j y d_j) y permeabilidades (k_j) en el horizonte superficial (j = 0) y en el subyacente (j = 1), diez de las magnitudes físicas que intervienen en la ecuación general de infiltración.

La aplicación del teorema π de Buckingham y su corolario conduce a la formación de los siguientes trece monomios adimensionales (π_i):

$$\pi_1 = \frac{a}{b} \quad [10] \qquad \pi_2 = \frac{a}{c} \quad [11] \qquad \pi_3 = \frac{d_0}{a} \quad [12]$$

$$\pi_4 = \frac{c_h}{c} \quad [13] \qquad \pi_5 = \frac{\zeta}{c} \quad [14] \qquad \pi_6 = \frac{d_0}{d_1} \quad [15]$$

$$\pi_7 = \frac{k_0}{k_1} \quad [16] \qquad \pi_8 = \frac{f}{k_1} \quad [17] \qquad \pi_9 = \frac{f}{\sqrt{g \cdot d_0}} \quad [18]$$

$$\pi_{10} = \frac{\rho \cdot f \cdot d_0}{\mu} \quad [19] \qquad \pi_{11} = \frac{f}{\sqrt{\psi / \rho}} \quad [20] \qquad \pi_{12} = \frac{f}{\sqrt{\sigma / \rho \cdot d_0}} \quad [21]$$

$$\pi_{13} = \frac{f}{\sqrt{\varepsilon / \rho}} \quad [22]$$

con lo que la función de partida [9] que describe el proceso de infiltración en un suelo utilizando dieciseis variables puede reducirse a otra función equivalente (ϕ) en la que intervienen únicamente trece variables adimensionales, los trece monomios definidos por las ecuaciones [10] a [22]:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}) = 1 \quad [23]$$

La obtención de todos los monomios es sencilla pero bastante farragosa. En efecto; la matriz de los coeficientes es:

n	Magnitud	Masa	Longitud	Tiempo
1	a	0	1	0
2	b	0	1	0
3	c	0	1	0
4	d_0	0	1	0
5	d_1	0	1	0
6	ζ	0	1	0
7	c_h	0	1	0
8	ρ	1	-3	0
9	γ	1	-2	-2
10	μ	1	-1	-1
11	ε	1	-1	-2
12	σ	1	0	-2
13	k_0	0	1	-1
14	k_1	0	1	-1
15	f	0	1	-1
16	ψ	1	-1	-2

Su característica es 3 por lo que el número de monomios en que queda reducido el problema es trece: 16 – 3 = 13

Cada uno de los monomios estará formado por los tres parámetros correspondientes a un menor no nulo y uno cualquiera de los trece parámetros restantes. Inicialmente y por el corolario enunciado, se puede obtener una serie de monomios con ayuda de unas magnitudes de referencia distintas de las que luego servirán de base para aplicar el teorema en sí.

Como primera terna de magnitudes elegimos c, k_1 y γ , cuya matriz de dimensiones tiene característica 3. Con esta terna obtenemos tres monomios, a saber: π_4, π_5, π_7, utilizando la ecuación: $\pi_i = Q_i \cdot c^{\alpha} \cdot k_1{}^{\beta} \cdot \gamma^{\eta} = f_i(Q_i)$
siendo Q_i una magnitud genérica (en este caso: c_h, ζ y k_0, respectivamente) y α, β y η tres exponentes que hacen a la expresión adimensional.

Ya que los cálculos son siempre iguales y a modo de ejemplo:

$$\pi_7 = k_0 \cdot c^{\alpha} \cdot k_1{}^{\beta} \cdot \gamma^{\eta} = f_7(k_0)$$

Para que este producto sea adimensional: $\alpha = 0$; $\beta = -1$ y $\eta = 0$, de manera que el monomio adimensional es: $\pi_7 = f_7(k_0) = \dfrac{k_0}{k_1}$.

Escribiendo la ecuación de dimensiones:

$$\{M\cdot L\cdot T\}^0 = \{L T^{-1}\}\{L\}^{\alpha}\cdot\{L\cdot T^{-1}\}^{\beta}\cdot\{M\cdot L^{-2}\cdot T^{-2}\}^{\eta}$$

$$M^0\cdot L^0\cdot T^0 = M^{\eta}\cdot L^{1+\alpha+\beta-2\cdot\eta}\cdot T^{-1-\beta-2\cdot\eta}$$

Luego: $\eta = 0$
$1 + \alpha + \beta - 2\cdot\eta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$-1 - \beta - 2\cdot\eta = 0 \Rightarrow \beta = -1$ con lo que queda comprobado.

Como segunda terna de magnitudes elegimos a, σ y μ , cuya matriz de dimensiones también tiene característica 3. Con esta terna obtenemos dos monomios, a saber: π_1 y π_2 . En este caso utilizamos como exponente –1.

$\pi_1 = b^{-1}a^{\alpha}\cdot\sigma^{\beta}\cdot\mu^{\eta}$ Para que este producto sea adimensional: $\alpha = 1$; $\beta = \eta = 0$

$\pi_2 = c^{-1}a^{\alpha}\cdot\sigma^{\beta}\cdot\mu^{\eta}$ Para que este producto sea adimensional: $\alpha = 1$; $\beta = \eta = 0$

La función de partida [9] puede sustituirse por esta otra equivalente:

$$F_2(a,\pi_1,\pi_2,d_0,d_1,\pi_5,\pi_4,\rho,\gamma,\mu,\varepsilon,\sigma,\pi_7,k_1,f,\psi) = 1$$

Ordenando variables: $F_2(\pi_1,\pi_2,\pi_4,\pi_5,\pi_7,a,d_0,d_1,\rho,\gamma,\mu,\varepsilon,\sigma,k_1,f,\psi) = 1$

Es ahora, una vez obtenidos estos cinco monomios por aplicación del corolario, cuando aplicamos el teorema π de Buckingham con las once variables restantes. La matriz de coeficientes, convenientemente ordenada, es:

n	Magnitud	Masa	Longitud	Tiempo
1	d_0	0	1	0
2	f	0	1	-1
3	ρ	1	-3	0
4	a	0	1	0
5	d_1	0	1	0
6	k_1	0	1	-1
7	γ	1	-2	-2
8	μ	1	-1	-1
9	ψ	1	-1	-2
10	σ	1	0	-2
11	ε	1	-1	-2

La característica de esta matriz es tres. Por lo tanto, el número de monomios adicionales a obtener es 8 (11 – 3). Como terna de magnitudes se elige en este caso: d_0, f

y ρ. Mediante la expresión general $\pi_i = Q_i \cdot d_0^{\alpha} \cdot f^{\beta} \cdot \rho^{\eta}$ se obtienen los ocho monomios que restan, a saber: π_3, π_6, π_8, π_9, π_{10}, π_{11}, π_{12} y π_{13}. El procedimiento de cálculo es idéntico al seguido con los ejemplos anteriores. Tan sólo significar que en unos casos se elige el exponente uno y en otros el exponente menos uno. A modo de último ejemplo, vamos a obtener π_9, que se corresponde con el número de Froude elevado al cuadrado.

$$\pi_9 = \gamma^{-1} \cdot d_0^{\alpha} \cdot f^{\beta} \cdot \rho^{\eta}$$

Escribiendo la ecuación de dimensiones:

$$\{M \cdot L \cdot T\}^0 = \{M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}\}^{-1} \cdot \{L\}^{\alpha} \cdot \{L \cdot T^{-1}\}^{\beta} \cdot \{M \cdot L^{-3}\}^{\eta}$$

$$M^0 \cdot L^0 \cdot T^0 = M^{-1+\eta} \cdot L^{2+\alpha+\beta-3\cdot\eta} \cdot T^{2-\beta}$$

Luego: $-1 + \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta = 1$
$2 + \alpha + \beta - 3 \cdot \eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$
$2 - \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 2$

con lo que $\pi_9 = \gamma^{-1} \cdot d_0^{-1} \cdot f^2 \cdot \rho^1 = \dfrac{f^2 \cdot \rho}{d_0 \cdot \gamma}$.

Entre la densidad absoluta (ρ) y el peso específico (γ) se cumple la siguiente relación: $\gamma = \rho \cdot g$, de manera que podemos escribir: $\pi_9 = \dfrac{f^2}{g \cdot d_0}$, con lo que llegamos a una expresión coincidente con la indicada en la ecuación [18]. El hecho de que aparezca su raíz $\left(\dfrac{f}{\sqrt{g \cdot d_0}} \right)$ no debe perturbarnos ya que cada monomio π_j puede ir elevado a cualquier exponente dentro de la función ϕ, como ya ha quedado dicho con anterioridad.

Así, llegamos finalmente a la ecuación enunciada de trece monomios:

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{12}, \pi_{13}) = 1 \quad [23]$$

función que puede ser simplificada por consideraciones de índole física hasta quedar sólo ocho parámetros definitorios del proceso (Martínez de Azagra *et al.*, 2006).

Anexo III: Funciones divagada

La combinación de una función neuronal con una función de distribución da lugar a una función divagada. Basta con que los recintos aprendidos de la función neuronal queden modificados por funciones de azar para tener funciones divagada. El procedimiento más directo consiste en multiplicar los términos de ciertas curvas o rectas frontera por números aleatorios (ξ_i) extraídos de funciones de distribución, dando a los nuevos recintos plena validez.

El origen de una función divagada lo encontramos en ciertas neuronas excitadas (en contraposición a neuronas estables) y cuyo estado denominamos “divagante”. Una neurona divagante cambia de perspectiva, alterando –de forma voluntaria y aleatoria– alguno de sus pesos sinápticos mediante un valor numérico ξ extraído de una función de distribución cualesquiera. Con ello modifica su comportamiento (es decir: su función de salida) de forma impredecible y –en algunas ocasiones– de forma ventajosa.

Si el valor ξ se obtiene, por ejemplo, de una función de distribución normal con media igual a uno ($\mu_e = 1$) cabe esperar un cambio gradual de perspectiva. En cambio, si $\mu_e \neq 1$ el salto esperable será brusco. A su vez, si la varianza (σ_e) es pequeña la divagación puede calificarse de prudente mientras que si σ_e es grande la divagación puede pronosticarse de imprudente.

Cualquier neurona estable puede excitarse en un momento dado, pasando a ser una neurona divagante que da lo aprendido por incierto tratando de descubrir por azar una nueva realidad, siendo más o menos prudente en la divagada merced a la función de distribución utilizada a la hora de extraer el valor numérico ξ.

Interesa recalcar, que una función divagada es el resultado (el efecto o la integral) que producen las distintas neuronas divagantes al interactuar con las neuronas estables de la capa neuronal que las asocia. En consecuencia, no debe identificarse función divagada con neurona divagante. Esta última supone únicamente el origen, la explicación formal al hecho de que el razonamiento pueda incluir divagadas, mutaciones voluntarias a la lógica.

Para comprender mejor el concepto de neurona divagante, bueno será partir del modelo matemático de una neurona: Una neurona artificial es un dispositivo de cálculo que imita el funcionamiento de una neurona biológica. Desde una perspectiva matemática se puede definir como una función que a partir de un vector de entrada (x_1, x_2, …., x_n) procedente de un estímulo exterior o de otras neuronas, proporciona una única respuesta o salida (y_i).

De entre los distintos modelos de neuronas artificiales existentes nos vamos a referir a un caso particular denominado “neurona estándar” para introducir los principales elementos de que constan estos modelos matemáticos (véase la figura 2), y para –con posterioridad– describir una neurona divagante.

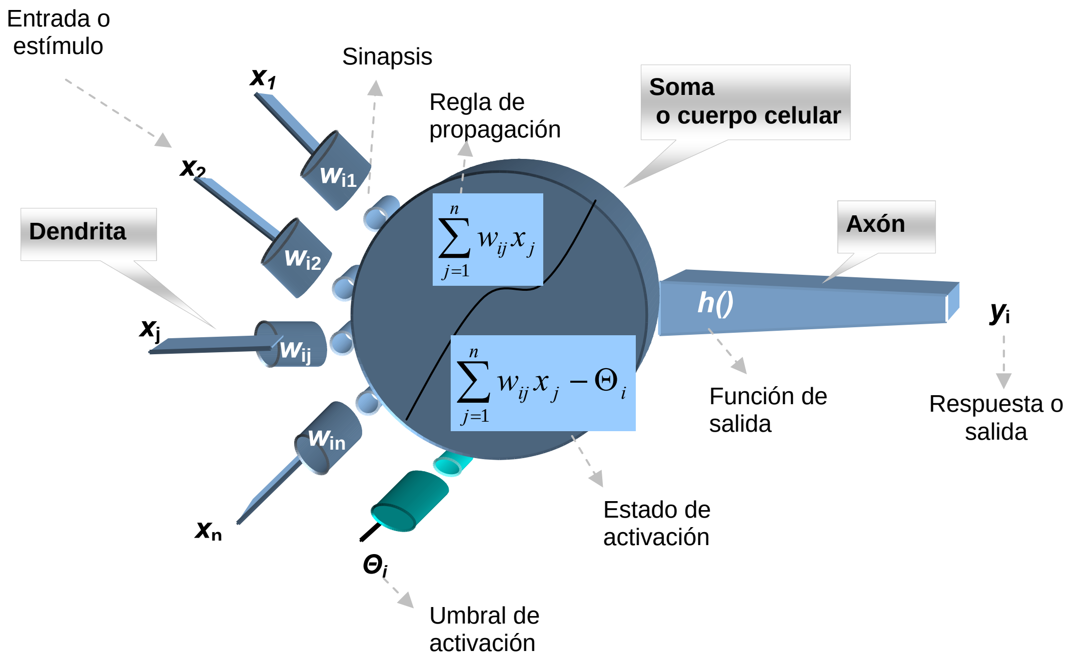

Figura 2: Modelo de la *i*-ésima neurona estándar

x_j son las variables de entrada a la neurona *i*-ésima. Pueden proceder del espacio sensorial o de otras neuronas. No existen limitaciones en cuanto a su naturaleza discreta o continua. Cada entrada es procesada por una dendrita *j*-ésima.

w_{ij} son los pesos sinápticos de cada dendrita *j*-ésima. Representan la intensidad de la interacción entre cada entrada *j*-ésima y la neurona *i*-ésima.

$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j$, es la regla de propagación considerada en el modelo de neurona estándar. Simula el valor postsináptico de la neurona. Se obtiene a partir de las entradas x_j y los pesos sinápticos w_{ij}. Es la operación que integra todas las entradas a la neurona. La función más habitual, en el modelo estándar, es la suma ponderada de las entradas x_j y los pesos sinápticos w_{ij}. También se puede interpretar como el producto escalar de los vectores de entrada y sus pesos.

Θ_i, es el umbral de activación. Simula el nivel mínimo que debe alcanzar el potencial postsináptico para que la neurona se active.

$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \Theta_i$, es el estado de activación, resultado de restar al potencial postsináptico el umbral de activación Θ_i.

$h()$ es la función de salida. Proporciona la respuesta de la neurona según su estado de activación. En el modelo estándar se supone la función identidad.

y_i es la variable de salida o de respuesta. Puede ser discreta o continua. El modelo de neurona estándar supone que el propio estado de activación es la salida.

Según sea el dominio de los valores de salida se realiza una clasificación de neuronas: valores binarios dan origen a las neuronas de tipo "McCulloch-Pitts"; de tipo "Ising" si sólo admiten dos estados, o de tipo "Potts" si admiten números naturales.

La ecuación matemática de una neurona estándar *i*-ésima [ecuación 24] recoge los conceptos descritos con anterioridad de la siguiente manera, donde todas las variables ya han sido presentadas:

$$y_i = h(w_{ij}, x_j, \Theta_i) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \Theta_i \quad [24]$$

De forma tradicional se admite que una neurona puede encontrarse en dos estados principales de funcionamiento: aprendizaje y recuerdo. En el primero de ellos el valor de los pesos sinápticos es desconocido para la neurona. En base a casos conocidos se realiza un ajuste o entrenamiento de la neurona para conocer su valor. Una vez concretados, la neurona ya está en disposición de hacer predicciones, de recordar. La aparición de un número suficiente de nuevos casos en los que la predicción sea errónea, conduce a una nueva fase de aprendizaje en el que se realizan sucesivos ajustes del vector de pesos sinápticos.

Hasta aquí hemos descrito de forma sucinta, qué es una neurona artificial. Recordemos que su actividad una vez entrenada nos ofrece un único valor de salida y_i. Adicionalmente conviene apuntar que un conjunto de neuronas forma una "capa neuronal" que genera un vector de soluciones ($y_1, y_2, \ldots, y_n$). A su vez, una "red neuronal" es un conjunto de capas cuyos vectores de entrada son los vectores de salida de la capa anterior.

Dentro de este esquema, ya clásico en matemáticas neuronales, la única forma de aprender pasa necesariamente por el reconocimiento de nuevos casos por parte de la neurona, los cuales provocan sucesivos entrenamientos, que ajustan los pesos sinápticos a la nueva realidad observada. Sin embargo no todo el conocimiento humano ha sido obtenido de manera acumulativa. La generalización del teorema π de Buckingham permite concebir un nuevo tipo de aprendizaje súbito, que nos permite explicar la aparición de saltos y comportamientos imprevistos en las neuronas. De hecho, una neurona puede encontrarse en tres estados de funcionamiento diferentes: los dos señalados con anterioridad más un tercero consistente en una actitud divagante. En tal estado una neurona estable y entrenada se comporta súbitamente de forma imprevista. Analíticamente, una neurona divagante puede adoptar la siguiente expresión [ecuación 25] partiendo del modelo de neurona estándar.

$$y_i^{'} = \sum_{j=1}^{k-1} w_{ij} \cdot x_j + \xi \cdot w_{ik} \cdot x_k + \sum_{k+1}^{n} w_{ij} \cdot x_j - \Theta_i \qquad [25]$$

donde ξ es un número aleatorio extraído de una función de distribución cualquiera, que la neurona divagante o excitada da por cierto. Su acción provoca un cambio de perspectiva en la toma de decisiones de la neurona. Se trata de una actitud voluntaria. La neurona lo hace adrede. No se trata de un error casual o accidental en la transmisión de los pesos sinápticos. El lugar *k* en donde se produce la divagación es elegido por la neurona, pudiendo también afectar al umbral de activación ($\xi \cdot \Theta_i$). Una frontera aprendida ($w_{ik} \cdot x_k$) queda modificada por un número aleatorio (ξ).

La magnitud de la divagación viene dada por el valor que haya tomado ξ. Números próximos a la unidad originan cambios pequeños en el comportamiento de la neurona. Valores numéricos bien distintos de la unidad, incidiendo sobre pesos sinápticos estratégicos, originarán un comportamiento notablemente diferente en la neurona.

Si se considera la función de distribución normal, como generadora del valor ξ, estamos en disposición de efectuar una primera tentativa de caracterización de la divagación: Valores de media $\mu_e = 1$ dan origen a un salto pequeño, con medias $\mu_e <> 1$ se produce un salto brusco, una varianza σ_e pequeña conduce a una divagación prudente y por ultimo una varianza σ_e elevada desemboca en una divagación imprudente. Igualmente se pueden considerar otras funciones de distribución como las binomiales con el fin de poder cambiar de operadores (<,>).

Una vez descrito el estado divagante de una neurona y análogamente al desarrollo planteado por las matemáticas neuronales, se puede inferir la existencia de una capa divagante, resultado de la interacción de distintas neuronas divagantes, e incluso la existencia de redes divagantes, que serán las que –finalmente– puedan conducir a una función divagada. El cerebro, para dar por válida dicha función o para rechazarla, rememora los recintos (o límites) previos comparando ambas soluciones (la surgida con las divagadas y la previa, fruto del aprendizaje). Es así cómo dilucida cuál parece más certera, más operativa, o más veraz.

Conviene preguntarse si la neurona puede divagar de forma dirigida o si se trata de un fenómeno puramente aleatorio. A poco que reflexionemos sobre el modelo descrito, concluiremos que la divagación, aunque de índole aleatoria, puede tener un marcado carácter dirigido. Como primera decisión dirigida está la elección del lugar k en donde incide el valor aleatorio ξ (sobre un peso w_{ij}, sobre el sumatorio Σ o sobre Θ_i). La segunda decisión dirigida se refiere a la función de distribución y a sus valores μ_e y σ_e (más o menos prudentes). Por otro lado, ciertas neuronas estándar contiguas pueden estar orientando a la neurona excitada en su divagación.

La mente humana obra para sus actos de índole física con una cortapisa de suma prudencia (fruto de su experiencia). Las divagadas no tienen prácticamente cabida en el plano de la realidad cotidiana. No ocurre lo mismo en sus pensamientos puros (conjeturas, sueños, etc.) en los que la mente no tiene que imponer limitación alguna a la hora de hacer transformadas (es decir: cambios de perspectiva). Sin embargo y pese a su frecuencia, sólo muy lentamente se producen progresos en la ciencia, en el conocimiento. Hemos de reconocerlo: los cerebros divagan con una eficiencia muy baja. Sólo de ciento al viento emergen, balbucientes, nuevos paradigmas científicos que exigen de la participación de un intenso debate intelectual antes de su aceptación, debido al gran cambio de perspectiva que nos plantean. Una función divagada (es decir: un hallazgo científico en el plano mental) conduce inicialmente a una duda o inestabilidad general, hasta que termina siendo aceptada como cierta.

Es hora de concluir este trabajo y lo debemos hacer consecuentemente, es decir: dudando mucho de nuestras propias divagadas.

Anexo IV: Significado de los símbolos utilizados

Símbolo	Significado
a	Variable dimensional genérica; Longitud característica del suelo según el eje horizontal x {L}
a_{jk}	Dimensión k de la magnitud Q_j respecto a la magnitud fundamental Q_k
$A!$	Ampliación de la complejidad por el cambio de perspectiva
b	Variable dimensional genérica; Longitud característica del suelo según el eje y {L}
c	Variable dimensional genérica; Longitud característica del suelo según el eje vertical z {L}
c_h	Longitud de la humedad lineal según el eje vertical z {L}
d	Variable dimensional genérica
d_0	Longitud de poros característica en el horizonte superficial, diámetro característico del horizonte superficial {L}
d_1	Diámetro característico en el segundo horizonte {L}
e	Variable genérica
f	Capacidad de infiltración del suelo $\{L \cdot T^{-1}\}$
$f_i(\ldots\ldots.)$	Una función genérica
F, $F_i(\ldots\ldots)$	Una función genérica
g	Aceleración de la gravedad $\{L \cdot T^{-2}\}$
$h(\ldots\ldots)$	Función de activación de una neurona
k_0	Permeabilidad del horizonte superficial $\{L \cdot T^{-1}\}$
k_1	Permeabilidad del horizonte subyacente $\{L \cdot T^{-1}\}$
L	Longitud {L}
M	Masa {M}
Q_j	Magnitud genérica
$R!$	Reducción de la complejidad gracias al cambio de perspectiva
t, T	Tiempo {T}
x	Variable genérica
x_j	Variable de entrada j-ésima a la neurona
y	Variable genérica
y_i, y_i'	Variable de respuesta de la neurona i-ésima
w_{ij}	Peso sináptico para la variable x_j
z	Variable genérica
α	Exponente {adim}
β	Exponente {adim}
χ	Variable dimensional genérica
δ	Variable dimensional genérica
ε	Módulo de elasticidad volumétrica $\{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}\}$
ϕ, ϕ_i	Una función genérica
γ	Peso específico del agua $\{M \cdot L^{-2} \cdot T^{-2}\}$
η	Exponente {adim}
$\varphi, \varphi_i(\ldots\ldots)$	Una función genérica
μ	Coeficiente de viscosidad dinámico $\{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}\}$
μ_e	Media de la función de distribución
π_i, π_i^*	Monomio genérico {adimensional o dimensional}
π_D	Dios {infinitas dimensiones anímicas}
π_M	Punto con toda la materia y energía del Universo
ρ	Densidad absoluta del agua $\{M \cdot L^{-3}\}$
σ	Coeficiente de tensión superficial $\{M \cdot T^{-2}\}$
σ_e	Varianza de la función de distribución
ϖ	Variable dimensional genérica
ξ, ξ_i	Número aleatorio extraído de una función de distribución
ψ	Potencial hídrico $\{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}\}$
ζ	Tortuosidad del flujo, del agua infiltrada en el suelo {L}
Θ_i	Umbral de activación de la neurona i-ésima

6. Bibliografía

Birkhoff, G. (1950): *Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact and Similitude.* Universidad de Princeton (EE.UU.)

Buckingham, E. (1914): On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations. *Physical Review,* 4: 345 – 376

Boyling, J.B. (1979): A Short Proof of the Pi Theorem of Dimensional Analysis. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 30: 531 – 533

Curtis, W.D.; David Logan, J. & Parker, W.A. (1982): Dimensional Analysis and the Pi Theorem. *Linear Algebra and its Applications*, 47: 117 – 126

Federman, A.K. (1911): Acerca de algunos métodos generales de integración de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden [en ruso]. Instituto Politécnico de San Petersburgo. *Estestvoznaniya i Matematika*, 16 (1): 97 – 155

Görtler, H. (1975): Zur Geschichte des Pi – Theorems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 55: 3 – 8

Martínez de Azagra Paredes, A.; Pando Fernández, V.; del Río San José, J. & Navarro Hevia, J. (2006): Aproximación al conocimiento de la infiltración a través del análisis dimensional. *Ecología*, 20: 471 – 491

Martinot-Lagarde, A. (1948) : *Analyse Dimensionelle : Applications à la Mecanique des Fluides.* Groupement des Recherches Aeronautiques (Lille, Francia)

Pobedrya, B.E. & Georgievskii, D.V. (2006) : On the Proof of the Π-Theorem in Dimension Theory. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 13 (4) : 431 – 437

Riabouchinski, D.P. (1911) : Méthode des variables de dimension zéro. *L'Aérophile*, 19 : 407 – 408

Vaschy, A. (1892): Sur les lois de similitude en physique. *Annales Télégraphiques,* 19: 25 – 28