SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

BOLETÍN N.º 86
OCTUBRE DE 2010

Artículo: Del teorema Π al axioma de las conjeturas razonadas

Autores: Andrés Martínez de Azagra Paredes, Valentín Pando Fernández y Jorge del Río San José

Páginas: 55 – 73

Resumen del artículo disponible en www.sociedadpuigadam.es
Artículo completo disponible en www.oasificacion.com

Del teorema Π al axioma de las conjeturas razonadas

Andrés Martínez de Azagra Paredes[a], **Valentín Pando Fernández**[b] **& Jorge del Río San José**[c]

[a] Departamento de Ingeniería Agrícola y Forestal
ETSIIAA (Universidad de Valladolid)
amap@iaf.uva.es

[b] Departamento de Estadística e Investigación Operativa
ETSIIAA (Universidad de Valladolid)
vpando@eio.uva.es

[c] Servicio Territorial de Medio Ambiente de Valladolid
Junta de Castilla y León
riosanjo@jcyl.es

Resumen

Con el presente trabajo se amplía y generaliza el teorema Π de Vaschy & Buckingham. En primer lugar y por medio de dos corolarios, se dota al teorema original de una mayor versatilidad a la hora de obtener monomios (productos) con significación física. En segundo lugar, generalizamos el teorema Π con lo que llegamos al axioma de las conjeturas razonadas. Se plantea la hipótesis de que el razonamiento humano se rija por el mencionado axioma. Conforme a esta hipótesis, nuestra mente opera como una función de funciones que va transformándose (o cambiando de perspectiva) según el transcurrir del tiempo. Entre las funciones a considerar aparece un nuevo tipo, que hemos denominado funciones divagada y cuya génesis se esboza. Se desarrolla el concepto matemático de idea y se aducen razones de peso en favor de la hipótesis principal del trabajo.

Abstract

In this paper, the Vaschy & Buckingham Pi Theorem is extended with two new corollaries. A broader generalization of this theorem *leads to the reasoned conjectures axiom. The hypothesis that human reasoning is governed by such an axiom is put forward. According to this hypothesis, the human mind operates as a function of functions in constant transformation, changing perspective as time elapses. Among the functions to be considered, a new type, known as divagada function, is presented here, along a brief discussion of its origin. The mathematical concept of idea is developed and a number of sound reasons underlying the main hypothesis of the paper are advanced as well.*

Introducción

El teorema Π de Vaschy, Riabouchinski & Buckingham [1, 2, 3] trata sobre el análisis dimensional de las fórmulas físicas. Es un teorema muy atractivo, sorprendente y útil en numerosos campos de la Física y de la Ingeniería. Como todo teorema, es fruto del pensamiento humano pero –a su vez y en este caso– constituye un modelo sencillo sobre la forma de pensar que tiene el propio ser humano. Es esto lo que le confiere un interés muy especial, como vamos a comprobar en este artículo.

El teorema Π define un cambio de perspectiva en la observación de un fenómeno físico, permitiendo su simplificación al reducir el número de variables implicadas en él (símbolo: *R!*, de reducción). Se llega por análisis dimensional a un número de monomios (o productos) sin dimensiones que describen el fenómeno físico de partida con la misma precisión que el planteamiento inicial, sólo que con menos variables. De una forma abreviada podemos resumir el teorema mediante la siguiente expresión o transformación:

$$F(a,b,c,d,........)=0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.......)=0 \qquad (1)$$

con F y φ funciones, a, b, c, d variables dimensionales y π_1, π_2 , π_3 variables adimensionales.

Se trata de un procedimiento preciso y estricto a la hora de cambiar de perspectiva: cada monomio (π_i) se obtiene a partir del producto de unas variables de referencia elevadas a unos exponentes que hagan al monomio adimensional [4].

Tanto por su utilidad práctica en el ámbito de la Física como por su enorme atractivo matemático y hasta filosófico, el teorema Π ha sido objeto de numerosos estudios y revisiones. Al respecto, merecen citarse los excelentes trabajos de Görtler (1975 a y b) [5, 6], de Carneiro (1992) [7], de Szirtes (1998) [8], de

González Redondo (2000, 2001, 2002) [4, 9, 10] en esta misma revista, y de Pobedrya & Georgievskii (2006) [11]. También conviene citar los trabajos de Martinot-Lagarde (1948) [12], Birkhoff (1950) [13], Boyling (1979) [14] y Curtis *et al*. (1982) [15], en donde el lector puede encontrar diferentes desarrollos matemáticos que conducen a su demostración.

El teorema Π también ha sido objeto de varias generalizaciones en diferentes sentidos. Desde el punto de vista formal y matemático pueden citarse los trabajos de Hainzl (1968) [16] (usando la teoría de los grupos de Lie) o de Carlson (1978) [17] (usando el Álgebra clásica). A su vez, Sonin (2004) [18] propone una generalización de índole física: Al distinguir entre constantes y variables a la hora de describir un fenómeno físico, el mencionado autor concluye que se puede llegar a una reducción mayor del número de monomios adimensionales que con el teorema original. Por su parte, algunos investigadores (Rudolph (1998, 2002) [19, 20] y Schmidt *et al.* (2005) [21]) sugieren que el tan mencionado teorema Pi tiene aplicación dentro del apasionante mundo de la inteligencia artificial. Ello les aproxima mucho a nuestra línea de pensamiento.

1 Ampliaciones y generalización del teorema Pi

El procedimiento matemático descrito en el teorema original resulta plenamente satisfactorio (a la vez que muy útil) pero puede parecer innecesariamente estricto, al ser la función F una función genérica y desconocida. Dicho de otra manera: cabe concebir otros muchos cambios de perspectiva diferentes sin necesidad de acudir al procedimiento rígido de los monomios adimensionales.

En un artículo sobre infiltración publicado en la revista Ecología (Martínez de Azagra *et al*., 2006 [22]) no se aplica el teorema Π, sino una noción del mismo consistente en hacer intervenir a todas las variables conectando todas entre sí a través de los coeficientes (o monomios) sin que ninguna quedara aislada, ajena del resto. Esta solución se obtiene directamente sin utilizar el procedimiento matemático concreto definido por Vaschy & Buckingham en su teorema, lo que sugiere la posibilidad de ampliarlo y/o generalizarlo (con posterioridad hemos llegado al corolario I, que autoriza formalmente a realizar tal cambio de perspectiva). En este apartado vamos a desarrollar dos corolarios de demostración trivial pero que conviene explicitar para hacer al teorema Π más versátil a la hora de obtener relaciones físicas de interés (tanto productos adimensionales [primer corolario] como productos dimensionales [segundo corolario]). Con posterioridad, plantearemos la generalización del teorema Π en lo que constituye el axioma de las conjeturas razonadas, para pasar después a interpretarlo y aplicarlo.

1.1 Corolario I

Se propone aplicar el procedimiento de obtención de monomios adimensionales utilizando magnitudes de referencia cambiantes (sustituyendo las magnitudes físicas iniciales por otras nuevas en mitad del proceso de cálculo). Es decir: el método consiste en aplicar el teorema original parcialmente, obteniendo ciertos monomios adimensionales π_1, π_2, π_3 llegando a una función intermedia: $\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \chi, \delta, \varpi, ...) = 0$, para después volver a aplicar el teorema con χ, δ, ϖ como nuevas magnitudes físicas de referencia.

Dada la función $F_1(Q_1, Q_2, ..., Q_r) = 0$ a la que se puede aplicar el teorema Π, esta función $F_1(...)$ se puede transformar en una función equivalente

$$F_2(f_1(Q_1), f_2(Q_2), ..., f_n(Q_n), Q_j, ..., Q_r) = 0, \quad \text{siendo}$$

$f_m(Q_m) = \pi_m = Q_m \cdot Q_i^{\alpha} \cdot Q_k^{\beta} \cdot ... \cdot Q_l^{\eta}$ un monomio adimensional cualquiera, convirtiendo tantas magnitudes Q_m en otros tantos monomios adimensionales como se desee, con tal de que se sigan satisfaciendo las condiciones de aplicación del teorema en la función equivalente $F_2(\pi_1, ..., \pi_n, Q_j, ..., Q_r)$ con las magnitudes Q_j a Q_r restantes.

En efecto: Si la función $f_m(Q_m) = Q_m \cdot Q_i^{\alpha} \cdot Q_k^{\beta} \cdot ... \cdot Q_l^{\eta}$ no fuese una transformación lícita para el problema inicial tampoco lo sería el procedimiento usado en el propio teorema Π de Vaschy & Buckingham, que es coincidente con el planteado con la función $f_m(Q_m)$.

Este corolario permite una gran flexibilidad en la obtención de monomios adimensionales lo que puede facilitar su posterior interpretación física. El lector que desee ver el corolario aplicado con detalle a un caso concreto puede consultar el trabajo de Martínez de Azagra *et al.* (2007)[23].

1.2 Corolario II

Supongamos que tenemos un fenómeno físico que se describe mediante la ecuación:

$$F(a, b, c, d, ...) = 0$$

siendo a, b, c, d ,… las variables dimensionales de partida que intervienen en el fenómeno físico estudiado, y F la función que liga dichas variables entre sí para describir el problema.

Este mismo fenómeno físico queda igualmente descrito mediante la función φ_1:

$$\varphi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...) = 0$$

siendo π_i monomios dimensionales (con igual dimensión, por ejemplo: todos l (longitud), o t (tiempo), o m (masa), o l/t,…). Puede tratarse de monomios unidimensionales (l, o t, etc.), bidimensionales (l/t, o m/t^2, o m/l^3, etc.), tridimensionales,…

$$F(a, b, c, d, ...) = 0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...) = 0 \qquad (2)$$

La reducción (*R!*) del número de variables es en este caso menor que en el teorema clásico Pi, en donde resulta máxima. En vez de *n* la reducción será (*n*–1), o (*n*–2), en general: (*n* – *i*), siendo *n* la característica de la matriz $\|a_{jk}\|$ e *i* la dimensión de los monomios obtenidos en el cambio de perspectiva planteado (consúltese el anexo I del trabajo de Martínez de Azagra *et al*. [23]).

En efecto: La expresión $\varphi_1(\pi_1, ...) = 0$, al incluir variables dimensionales, permite una ulterior simplificación aplicando el teorema clásico Pi con lo que se obtiene la ecuación $\varphi_2(\pi_1^*, ...) = 0$ en la que todos los monomios (π_j^*) ya sí son adimensionales. Esta reducción adicional del número de variables es la que falta en el cambio de perspectiva propuesto por el corolario II.

$$\varphi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...) = 0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_2(\pi_1^*, \pi_2^*, ..) = 0 \qquad (3) \equiv (1)$$

A su vez y aplicando el primer corolario, pueden obtenerse dentro de la expresión $\varphi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...) = 0$, monomios con dimensiones diferentes (p.ej.: uno l, otro t, otro m) de manera que los cambios de perspectiva que pueden alcanzarse son múltiples, pudiendo ser alguno muy ventajoso a la hora de profundizar en la comprensión o en la descripción de un fenómeno físico dado. Por poner un ejemplo bien conocido por todos, el segundo principio de Newton se enuncia de forma dimensional (sumatorio de fuerzas exteriores = masa por aceleración absoluta: $\sum \overline{F} = m \cdot \overline{a}$) y no mediante monomios adimensionales: $\pi_N = 1 = \dfrac{\sum F}{m \cdot a}$.

2 Axioma de las conjeturas razonadas

Vamos a exponer un sencillo razonamiento que nos conduce al axioma, para después enunciarlo de dos formas diferentes y complementarias.

Adviértase que, por motivos didácticos, en este apartado seguimos el camino inverso de las demostraciones matemáticas habituales: partimos de un teorema y llegamos a un axioma.

Sean tres investigadores (A, B, y C) que se plantean el mismo fenómeno físico para su descripción (resolución) llegando a tres funciones de partida genéricas y diferentes (F_A, F_B y F_C) , siendo los tres planteamientos correctos y completos. El primero consigue reducir el número de variables aplicando el teorema Π; el segundo no llega a reducir su problema y el tercero consigue la reducción sin aplicar el teorema Π estricto pero sí una noción del mismo. Pues bien: esta situación (muy común en investigación, sobretodo la (5)) evidencia la posible existencia de generalizaciones al teorema. La pregunta inmediata que surge es: ¿qué otras formas cabe concebir para cambiar de perspectiva eficazmente sin tener que acudir a la intuición, como hace el físico C?

A plantea:

$$F_A(a,b,c,d,........) = 0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_A(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.......) = 0 \qquad (4)$$

B plantea:

$$F_B(f_1(a), f_2(b), f_3(c,d),........) = 0 \quad \xrightarrow{?} \text{ No llega a reducir el problema. } (5)$$

C plantea:

$$F_C(a,b,c,f_4(d),........) = 0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_C(\pi_1^*,\pi_2^*,\pi_3,.......) = 0 \qquad (6)$$

siendo $f_i(x,y,...)$ funciones genéricas.

El físico C llega a la solución reducida sin poder aplicar el teorema Π estricto, pero sí una noción del mismo. Luego deben existir generalizaciones al teorema Pi.

Una pregunta importante es: ¿Qué propiedades tienen que tener las funciones internas $f_i(x,y,...)$ para poder aplicar un teorema Π generalizado?

Como planteamiento general estas funciones podrán ser de cuatro tipos:

$f_i(x,y,...) \rightarrow$ funciones matemáticas clásicas (operadores, etc.): símbolo *f*

$f_i(x,y,...) \rightarrow$ funciones de distribución: símbolo *g*

$f_i(x,y,...) \rightarrow$ funciones neuronales (con aprendizaje / memoria): símbolo *n*

$f_i(x, y, ...)$ $\rightarrow$ funciones divagada (un salto intuitivo, imprevisible, en total libertad, erróneo o acertado): símbolo *ñ*. En el apartado cuarto se retoma la cuestión.

Conviene indicar, que en un planteamiento más general, las propias funciones del problema (simbolizadas por F, F_A, F_B, F_C) pueden pertenecer a cualquiera de los cuatro tipos señalados.

Si el problema planteado incluye únicamente funciones internas de los tres primeros tipos (*f*, *g*, *n*) podrá existir un teorema Π generalizado que simplifique la cuestión. Si, además, incorpora alguna función divagada (*ñ*), es el axioma de las conjeturas razonadas quien puede resolver el problema. Para cambiar de perspectiva hemos de acudir al axioma de las conjeturas razonadas, que podemos enunciar así:

"Ante cualquier situación siempre se puede cambiar de perspectiva." Dicho de una manera más positiva (aunque restrictiva): Ante un problema siempre se puede cambiar de perspectiva razonadamente hasta llegar a entrever su solución. Sin embargo, el cambio de perspectiva también puede conducirnos a problemas más complejos, es decir: no siempre conseguiremos una reducción del problema (símbolo: *R!*) sino que podemos estar ampliando la complejidad inicial del planteamiento (símbolo: *A!*), lo que –en algunos casos– puede resultar esclarecedor. {Nota: Se sobrentiende que el cambio de perspectiva también pueda mantener el nivel de complejidad (símbolo *I!*). Esta circunstancia trivial no se refleja en la notación que empleamos para el axioma.}

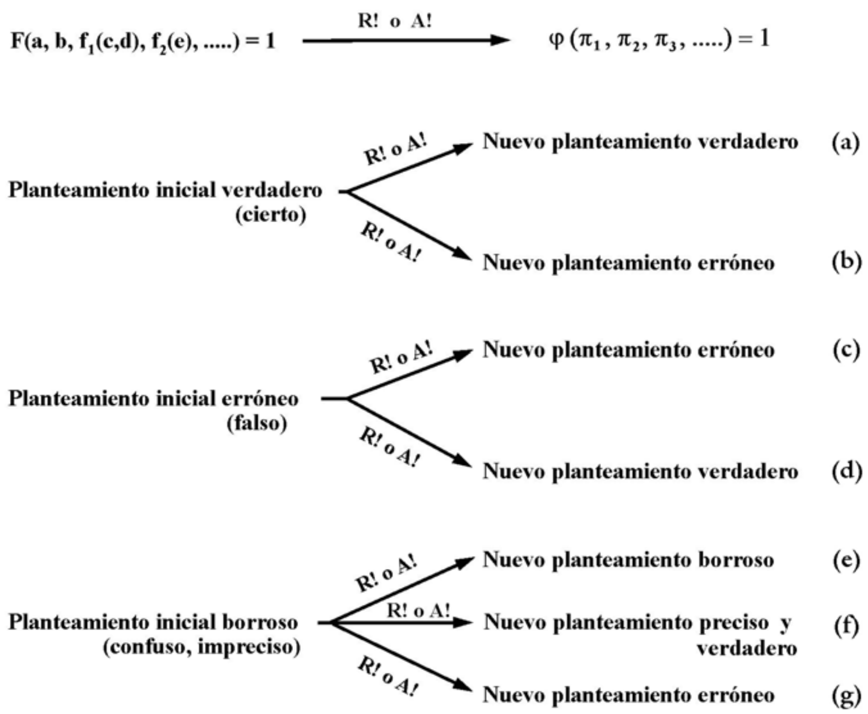
$$F(a, b, f_1(c, d), f_2(e), ...) = 1 \xrightarrow{R! \text{ ó } A!} \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ...) = 1 \qquad (7)$$

siendo $f_i(x, y, ...)$ funciones matemáticas (*f*), funciones de distribución (*g*), funciones neuronales (*n*) y/o funciones divagada (*ñ*), y π_i un monomio (dimensional o adimensional) genérico.

{Nota: Monomio, en su acepción habitual, es una expresión algebraica que consta de un solo término. En la generalización que proponemos tiene un significado mucho más amplio, pudiendo identificarse con cualquier entidad o ente que constituya una unidad (tanto física como anímica).}

Este axioma es indemostrable pero a la vez evidente por lo que no requiere de demostración. Puede parecer a primera vista una perogrullada pero tiene su interés, pues encierra al menos una buena parte del razonamiento del cerebro humano (si no todo él) y el de muchos animales. El cambio de perspectiva que postula ocurre en nuestro cerebro tanto voluntaria como involuntariamente con el transcurso del tiempo.

Las conjeturas pueden estar bien o mal razonadas (pues pueden deberse a cambios erróneos, a funciones divagada equivocadas), de manera que son en gran medida imprevisibles. Hay en ellas un importante grado de incertidumbre, imprecisión y error. Véase la figura 1.



La figura 1 contempla siete cambios de perspectiva diferentes (atendiendo a su veracidad y precisión). La mente recorre estos siete caminos incesantemente, pero sólo valora de manera positiva los cambios que conducen a planteamientos acertados (a, d, f). Las otras cuatro opciones las desdeñamos pese a ser inherentes a la forma de pensar que tiene el propio cerebro. El camino (d) se suele enunciar como un principio (omitiendo el origen -poco decoroso- que ha llevado a su descubrimiento). El camino (e) es -con mucho- el más frecuente en la mente humana. El camino (f) es el de la lógica borrosa cuando se apunta un tanto dentro de las matemáticas clásicas.

El axioma enunciado, como cualquier axioma, no requiere de demostración (en este caso concreto y entre otras razones, por encerrar en sí mismo divagadas). No ocurre lo mismo con los teoremas previos que conducen a él, que habrán de ser demostrados uno a uno.

La forma más sencilla de expresar este axioma es con palabras, pues no en vano las palabras (el lenguaje) son la expresión del funcionamiento del cerebro humano.

Se trata de un axioma bastante abstracto, pero es que estamos tratando de describir el funcionamiento de la mente humana, que en modo alguno es precisa ni predecible.

Como segundo enunciado alternativo y complementario del axioma de las conjeturas razonadas proponemos el siguiente: "Nuestro cerebro (y el del resto de animales) es un contenedor y un transformador continuo y libérrimo de ideas."

{Nota: El adjetivo 'libérrimo' resulta muy exagerado. En rigor, se trata de una transformación aparentemente libre. A buen seguro que es un proceso bioquímico con muchos grados de libertad, pero en modo alguno infinitos. Los cambiadores elementales de perspectiva y sus posibilidades pueden ser numerosos pero no son ilimitados. Otra restricción muy importante a esta supuesta libertad se comenta más adelante: se trata de una libertad fuertemente condicionada por la especie.}

Este segundo enunciado, por lo demás, irrefutable, se deja matematizar en lo que constituye el axioma de las conjeturas razonadas. Se trata de una expresión que resulta algo más compleja que una reacción química habitual. De hecho, refleja una reacción bioquímica. Y es que ha de existir y producirse tal reacción bioquímica elemental en nuestras neuronas para que pensemos, para que razonemos. No puede ser de otra manera: Existe una reacción bioquímica elemental (o un conjunto de reacciones bioquímicas elementales) estable(s) y de muy poco gasto energético que constituye(n) la base misma del pensamiento humano. En un futuro no muy lejano algún investigador describirá dicha reacción (o reacciones) al igual que se ha conseguido con la reacción que explica la transmisión de la información genética.

{Nota: Nos referimos a reacción bioquímica en sentido amplio: una reacción molecular (intracelular y/o intercelular; en la neurona y/o entre neuronas).}

a) Reacción química genérica:

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots \xrightarrow{(T,p,pH\ldots)} \pi_1^{\,*} + \pi_2^{\,*} + \ldots$$

siendo π_i y $\pi_i^{\,*}$ compuestos químicos (o reactivos)

Conviene señalar que se han de concretar las condiciones del medio en que se produce la reacción química (temperatura, presión, luz, catalizadores, enzimas, pH,…) para que su camino sea conocido, unívoco.

Como mejor ejemplo de reacción química podemos citar a la fotosíntesis, que es sostén indispensable de nuestra propia vida, al procurarnos el oxígeno que respiramos.

$$CO_2 + 2\cdot H_2O \xrightarrow{luz} CH_2O + H_2O + O_2$$

b) Axioma de las conjeturas razonadas (↔ versión general de una reacción bioquímica genérica ↔ en un enfoque mucho más amplio: transformación cualesquiera del Mundo o principio elemental del cambio).

$$F(\pi_1,\ldots,\pi_i,\ldots) = 1 \xrightarrow{R!\ \acute{o}\ A!} \varphi(\pi_1^{\,*},\ldots,\pi_i^{\,*},\ldots) = 1 \qquad (8) \equiv (7)$$

con π_i y $\pi_i^{\,*}$ entes (monomios) dimensionales anímicos (como, por ejemplo, las ideas) o físicos (como, por ejemplo, todas las variables físicas)

F y φ funciones matemáticas en sentido amplio (pues incluimos a las funciones divagada), funciones cerebrales, neuronales; funciones físicas

Como expresión matemática general para el axioma de las conjeturas razonadas proponemos la siguiente:

$$F(a,b,f_1(c,d),f_2(e),\ldots) = 1 \quad \overset{R!\text{ o }A!}{\rightsquigarrow} \quad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots) = 1 \qquad (9) \equiv (8) \equiv (7)$$

Conviene utilizar el símbolo $\overset{R!\text{ o }A!}{\rightsquigarrow}$ en vez de $\xrightarrow{R!\ \acute{o}\ A!}$ cuando el cambio de perspectiva no sea concreto (línea sinuosa en vez de línea recta). No obstante y al no existir tal opción en el editor de ecuaciones matemáticas que manejamos, vamos a utilizar el símbolo $\xrightarrow{R!\ \acute{o}\ A!}$ indistintamente.

Un apunte de índole menor se refiere al cambio numérico realizado, si comparamos la expresión resumida del teorema Pi con la del axioma de las conjeturas razonadas. Se pasa de igualar la función a cero (en el teorema) a igualarla a uno (en el axioma). Es para denotar que se produce un salto cualitativo y cuantitativo importante; pero podríamos haber mantenido la igualdad a cero sin ningún inconveniente.

Teorema: $F(a,b,c,d,........) = 0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.......) = 0 \quad (1)$

Axioma: $F(a,b,f_1(c,d),f_2(e).....) = 1 \overset{R!\ o\ A!}{\rightsquigarrow} \varphi\,(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.....) \;= 1 \quad (9)$

3 Cambiador general de perspectiva

Un cambiador de perspectiva, en su versión más general, no debe ser un procedimiento concreto sino que ha de ser genérico. Para plantear y resolver la cuestión hay que proseguir con la brillante abstracción del propio teorema Pi en la que las funciones (*F*, φ, …) son genéricas. Así pues, el transformador (o cambiador) general de perspectiva (τ) se define como una función de funciones que incluye las cuatro funciones básicas (*f*, *g*, *n* y *ñ*) con cuatro operadores del tipo sí/no (actúa/no actúa). Esta función de funciones combina monomios entre sí formando nuevos monomios (en mayor, menor o igual número). Así pues:

$$\tau\left(\pi_j,\pi_k,\pi_l\right) = \pi^*_k,\pi^*_m \quad (10)$$

$$\tau\left(\pi_j,\pi_k,\pi_l\right) = \alpha f\left(\beta g\left(\phi n\left(\lambda \tilde{n}\left(\pi_j,\pi_k,\pi_l\right)\right)\right)\right) = \pi^*_k,\pi^*_m \quad (11)$$

en donde: α , β , ϕ , λ son operadores sí/no que hacen que la función actúe (transforme) o no (en cuyo caso se convierte en la función identidad) sobre los monomios.

f es una función matemática
g es una función aleatoria
n es una función neuronal
$\tilde{n}$ es una función divagada

{Nota: El orden de actuación de *f*, *g*, *n*, *ñ* debe concebirse arbitrario, es decir: la función divagada (*ñ*) puede ser tanto la primera como la última en actuar, y así –respectivamente – con las otras tres funciones.}

π_j , π_k , π_l son 0, 1, 2, 3 ó más monomios de partida (iniciales)

π^*_k , π^*_m son 0, 1, 2, 3 ó más monomios de llegada (finales), resultado del cambio de perspectiva motivado por el transformador τ

{Nota: La no coincidencia del número inicial con el número final de monomios explica el hecho de que con el cambio de perspectiva pueda producirse una reducción (*R!*) o un aumento (*A!*) del número de variables.}

Un caso particular de cambiador de perspectiva es el que propone el teorema Pi. Se trata de una función matemática (*f*) muy sencilla: la multiplicación de unas variables (o magnitudes) físicas elevadas a unos exponentes que logran una mejora o síntesis en la comprensión del fenómeno físico estudiado (*R!*), merced a llegar a unos números adimensionales.

Otra situación particular interesante se refiere al modelo de funcionamiento que proponemos para nuestro propio cerebro. Los monomios son en este caso ideas individuales, es decir: magnitudes anímicas que se transforman por la intervención de los cambiadores de perspectiva (τ), dando lugar a un caso particular del axioma de las conjeturas razonadas.

Así pues, cualquier transformación (o cambio de perspectiva) queda descrito mediante las dos expresiones siguientes:

$$F(\pi_1,\pi_2,........,\pi_n)=1 \quad \xrightarrow{R!\ \acute{o}\ A!} \quad \varphi(\pi_1^*,\pi_2^*,.....,\pi_m^*)=1 \quad (8)\ (\acute{o}\ (7)\ \acute{o}\ (9))$$

$$\tau\left(\pi_j,\pi_k,\pi_l\right)=\alpha f\left(\beta g\left(\phi n\left(\lambda \tilde{n}\left(\pi_j,\pi_k,\pi_l\right)\right)\right)\right)=\pi_k^*,\pi_m^* \quad (11)$$

El modelo general que formulamos con estas dos expresiones deberá ser concretado en próximos estudios: ¿Con qué funciones puede trabajar un transformador τ de forma estable? ¿Con qué funciones opera nuestro cerebro y el del resto de animales? ¿Son las mismas funciones para todas las especies? ¿Son muchas? ¿Cuántas y cuáles son?

Para estas importantes cuestiones no tenemos respuestas seguras aún. Sabemos que se trata de funciones matemáticas con base biológica que habrán de obtenerse por la vía deductiva y por la vía experimental. Además, estamos en condiciones de aventurar que las funciones biológicas que buscamos van a ser pocas (pero versátiles) y muy similares (por no decir iguales) en todos los seres vivos con sistema nervioso.

El axioma de las conjeturas razonadas requiere un mínimo de cuatro funciones (una función matemática (*f*), una estadística (*g*), una neuronal (*n*) y una divagada (*ñ*)) para ser operativo y completo. Pero los sistemas biológicos pudieran estar operando con menos funciones: como caso extremo, una única función que –al ser entrelazada consigo misma– logre los distintos efectos, significados y utilidades requeridos por las neuronas.

Como funciones matemáticas básicas precisamos de la unión (pero no entendida como una suma o multiplicación rígida de números y funciones; más bien: una combinación en sentido amplio y reversible) y de la fragmentación (pero no una mera división de números). A su vez, hemos de considerar una o dos funciones de distribución (a ser posible sencillas: por ejemplo, una discreta y otra continua), una función neuronal (p.ej.: la de una neurona estándar) y una función divagada (p.ej.: la descrita en el apartado cuarto, combinación de una función neuronal y una función de distribución). El modelo, para que no se dispare y evolucione erróneamente, debe ser completado con una función de distancia que mida cada cierto tiempo la diferencia entre las ideas y la realidad (entre los números y relaciones del modelo, y los números y relaciones reales). Para eso están nuestros sentidos, que nos ofrecen una noción bastante aproximada y continua de la realidad que nos rodea.

El modelo propuesto no puede evolucionar libremente sino que ha de ser dirigido, de lo contrario se descontrola y disparata. Eso mismo ocurre al aplicar el teorema Pi de Vaschy & Buckingham de forma automatizada y al obtener todos los monomios adimensionales posibles (Sheppard, 2007) [24]. Con el transformador elemental del teorema Pi se obtienen muchísimos monomios, de los cuales sólo algunos tienen sentido físico. Las “ideas” obtenidas con el transformador Pi se confrontan con la realidad para admitir algunos resultados y rechazar otros por carecer de sentido físico.

En los seres vivos muchos cambios de perspectiva (τ) no son en modo alguno libres. Están dirigidos con toda precisión a través de la información genética que posee la propia especie. Así quedan fijados los comportamientos instintivos y específicos de cada animal. Este hecho puede explicarse con el modelo que propugnamos si concebimos que los cambios de perspectiva iniciales se deben a transformaciones matemáticas rígidas en las que no caben variables aleatorias ni funciones divagada. El conjunto de información que conforma el comportamiento de una especie viene a corresponderse con el sistema operativo de un ordenador y viene definido en su código genético. Posteriormente, cada individuo vive y se desenvuelve en un medio concreto que le exige conductas y decisiones adecuadas, acertadas. Los animales más evolucionados (verbigracia: los mamíferos, en general, y el hombre, en particular) tienen una gran capacidad de aprendizaje individual a través de su experiencia personal y por medio de la educación. Es en esta fase de la vida cuando entran en juego las funciones estadísticas y las funciones divagada. Pero, insistimos, el aprendizaje inicial es muy estricto (específico) y está dirigido genéticamente o –dicho en otras palabras– el transformador τ no puede evolucionar libremente hasta que no posea mucha información de partida que lo haga estable. De lo contrario generará continuos disparates: números y funciones erróneas, sin aplicación práctica alguna.

A la hora de definir y programar cambiadores de perspectiva (cerebros artificiales τ) se debe empezar por los más sencillos: aquéllos que sólo incluyan unas pocas funciones matemáticas de combinación y fragmentación más una función estadística elemental (como lo son los operadores sí/no [α , β , ϕ , λ], que pueden actuar con más o menos frecuencia). Posteriormente, se pueden ir complicando los modelos hasta desembocar en un modelo general que incluya los cuatro tipos de funciones. Algunos transformadores τ serán muy estables, prudentes, monótonos y poco creativos. En el extremo opuesto estarán los modelos fuertemente inestables, desequilibrados, "locos" que conducen a resultados imprevistos y erróneos en muy pocas transformaciones y aún partiendo de una información amplia y precisa. Y, como siempre, en el medio estará la virtud: habrá que buscar y encontrar cerebros artificiales rápidos, sensatos y creativos para que piensen con y por nosotros. La tarea no parece fácil pero sí muy atractiva.

4 Funciones divagada

Un punto que parece endeble en todo nuestro desarrollo matemático se refiere al concepto de función divagada, pero en realidad no es así. Resulta evidente que no se pueden concretar estas funciones, pues al hacerlo dejan de ser tales. Sin embargo conviene apuntar tan siquiera cuál puede ser su génesis.

La combinación de una función neuronal (n) con una función de distribución (g) da lugar a una función divagada ($\tilde{n}$). Basta con que los recintos aprendidos de la función neuronal queden modificados por funciones de azar para tener funciones divagada. El procedimiento más directo consiste en multiplicar los términos de ciertas curvas o rectas frontera por números aleatorios (ξ) extraídos de funciones de distribución, dando a los nuevos recintos plena validez.

El origen de una función divagada lo encontramos en ciertas neuronas excitadas (en contraposición a neuronas estables) y cuyo estado denominamos "divagante". Una neurona divagante cambia de perspectiva, alterando –de forma voluntaria y aleatoria– alguno de sus pesos sinápticos mediante un valor numérico ξ extraído de una función de distribución cualesquiera. Con ello modifica su comportamiento (es decir: su función de salida) de forma impredecible y –en algunas ocasiones– de forma ventajosa.

Si el valor ξ se obtiene, por ejemplo, de una función de distribución normal con media igual a uno ($\mu_e = 1$) cabe esperar un cambio gradual de perspectiva. En cambio, si $\mu_e \neq 1$ el salto esperable será brusco. A su vez, si la varianza (σ_e) es pequeña la divagación puede calificarse de prudente mientras que si σ_e es grande la divagación puede pronosticarse de imprudente.

Cualquier neurona estable puede excitarse en un momento dado, pasando a ser una neurona divagante que da lo aprendido por incierto tratando de descubrir por azar una nueva realidad, siendo más o menos prudente en la divagada merced a la función de distribución utilizada a la hora de extraer el valor numérico ξ.

Interesa recalcar, que una función divagada (*ñ*) es el resultado final (el efecto) que producen las distintas neuronas divagantes al interactuar con las neuronas estables de la capa neuronal que las asocia. En consecuencia, no debe identificarse función divagada con neurona divagante. Esta última supone únicamente el origen, la explicación formal al hecho de que el razonamiento pueda incluir divagadas, mutaciones voluntarias a la lógica.

Un desarrollo más detallado del concepto de neurona divagante puede encontrarse en el anexo III del trabajo de Martínez de Azagra *et al.* (2007) [23].

5 Aproximación matemática al concepto de idea

De acuerdo con el axioma de las conjeturas razonadas, una idea es una combinación de ideas previas.

Como expresión general de idea (π_k^*) podemos escribir:

$$\pi_k^* \ (\cup\ \pi_m^*) = \tau\left(\pi_j, \pi_k, \pi_l\right) \quad (12)$$

$$\pi_k^* \ (\cup\ \pi_m^*) = \alpha f\left(\beta g\left(\phi n\left(\lambda \tilde{n}\left(\pi_j, \pi_k, \pi_l\right)\right)\right)\right) \quad (13)$$

siendo estas dos expresiones equivalentes a las dos precedentes (10 y 11).

Esta definición matemática, aunque rigurosa, es demasiado abstracta para satisfacer la inquietud de un lector exigente: Pero ¿qué es una idea? ¿Qué unidades tiene? ¿Cómo puede concretarse matemáticamente? …

La cuestión no es baladí, desde luego: Por reducción al absurdo se llega a que las ideas son entes unitarios (monomios) anímicos: Pues, en efecto, ninguna idea pesa 5 kg, ni tiene 50 ha de superficie, o 17 A de corriente eléctrica, ni posee 10 candelas de luz, ni está constituida por 33 moles de materia pensante. Pensamos que nadie, en su sano juicio, puede afirmar tales cosas (salvo que esté de broma).

Llegados a este punto, se comprende la necesidad de definir unas magnitudes anímicas equivalentes a las siete magnitudes físicas fundamentales manejadas en la actualidad (masa, longitud, tiempo, temperatura, intensidad de corriente eléctrica, intensidad luminosa y cantidad de materia). Sólo así se podrá avanzar.

Sólo así se podrá concretar el concepto de idea, una cuestión tan crucial como escurridiza y evitada por la Ciencia hasta la fecha.

Va siendo hora de corregir tan importante carencia. Creemos estar en condiciones de poderlo hacer, pero el reducido espacio de un artículo nos obliga a posponer la cuestión para un próximo trabajo. ¡Tiempo al tiempo, amigo lector!

6 Acerca de la teoría unificada

No resulta fácil encontrar ejemplos convincentes sobre que el axioma de las conjeturas razonadas constituya un modelo potente y completo de cómo funciona el cerebro humano. Tal vez uno, bastante atractivo, pueda ser el de la teoría unificada que buscan los físicos afanosamente:

Dependa la teoría cuántica de las constantes, variables y funciones siguientes: a, b, $f_1(c,d)$, e, etc. y dependa la teoría de la relatividad de A, $F_1(B,C,D)$, E, etc.

Pues bien: la teoría unificada queda definida por:

$$\varphi_1\left(a,b,f_1(c,d),e,...,A,F_1(B,C,D),E,...\right)=1 \quad (14)$$

siendo φ_1 una función genérica a concretar por experimentación y/o por desarrollos matemáticos.

El problema planteado se resolverá aplicando el axioma de las conjeturas razonadas, es decir: cambiando de perspectiva de forma eficiente (o dicho de otra manera: razonando). Escrito matemáticamente:

$$\varphi_1\left(a,b,f_1(c,d),e,...,A,F_1(B,C,D),E,...\right)=1 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_2\left(\pi_1,\pi_2,...\right)=1 \quad (15)\equiv(7)$$

Un primer intento puede consistir en aplicar el teorema Π de Vaschy & Buckingham o la generalización propuesta por Sonin [18] y que agrupa el problema en variables y constantes.

Un segundo intento para resolver la cuestión consiste en aplicar el teorema Pi con su primer corolario. Aparecerán monomios adimensionales cuya expresión e interpretación puede ayudar a profundizar en la conexión entre ambas teorías.

Como tercera posibilidad contamos con el corolario II del teorema Π , que considera monomios dimensionales.

En último término, es el axioma de las conjeturas razonadas quien resolverá el problema planteado. En tal caso, habrá que esperar a que un Genio dé con la solución merced a un hallazgo (a una función divagada clarificadora). Pero entretanto y de forma genérica, lo podemos dar por resuelto con ayuda del axioma (ecuación 15), lo que pone de manifiesto que se trata de un modelo sobre el funcionamiento de la mente humana.

C.Q.F.D.

Referencias

[1] Vaschy, A. (1892): "Sur les lois de similitude en physique". *Annales Télégraphiques,* 19: 25 – 28

[2] Riabouchinski, D.P. (1911): "Méthode des variables de dimension zéro". *L'Aérophile*, 19 : 407 – 408

[3] Buckingham, E. (1914): "On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations". *Physical Review,* 4: 345 – 376

[4] González Redondo, F.A. (2000): "El teorema Π de Buckingham: núcleo del Análisis Dimensional". *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 55: 67 – 75

[5] Görtler, H. (1975 a): "Zur Geschichte des Pi – Theorems". *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 55: pp. 3 – 8

[6] Görtler, H. (1975 b): *Dimensionsanalyse. Theorie der physikalischen Dimensionen mit Anwendungen.* Springer (Berlin, Alemania)

[7] Carneiro, F.L.L.B. (1992): "A evolução da Análise Dimensional de Vaschy (1890) a Buckingham (1914): O teorema de Pi". Seculo XIX: O nascimento da Ciencia Contemporanea. UNICAMP, Campinas (Brasil): 328 – 348

[8] Szirtes, T. (1998): *Applied Dimensional Analysis and Modeling.* McGraw-Hill (EEUU)

[9] González Redondo, F.A. (2001): "Génesis y primera formulación del Teorema Π." *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 59: 83 – 93

[10] González Redondo, F.A. (2002): "El teorema Π entre Vaschy y Buckingham: el método de las variables de dimensión cero". *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 60: 71 – 81

[11] Pobedrya, B.E. & Georgievskii, D.V. (2006) : "On the Proof of the Π-Theorem in Dimension Theory". *Russian Journal of Mathematical Physics*, 13 (4): 431 – 437

[12] Martinot-Lagarde, A. (1948): *Analyse Dimensionelle : Applications à la Mecanique des Fluides.* Groupement des Recherches Aeronautiques (Lille, Francia)

[13] Birkhoff, G. (1950): *Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact and Similitude.* Universidad de Princeton (EE.UU.)

[14] Boyling, J.B. (1979): “A Short Proof of the Pi Theorem of Dimensional Analysis”. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 30: 531 – 533

[15] Curtis, W.D.; David Logan, J. & Parker, W.A. (1982): “Dimensional Analysis and the Pi Theorem”. *Linear Algebra and its Applications*, 47: 117 – 126

[16] Hainzl, J. (1968): “Verallgemeinerung des Π - Theorems mit Hilfe spezieller Koordinaten in Lieschen Transformationsgruppen”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 30: 321 – 344

[17] Carlson, D.E. (1978): “On some new results in dimensional analysis”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 68 (3): 191 – 210

[18] Sonin, A.A. (2004): “A generalization of the Π-theorem and dimensional analysis”. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101 (23): 8525 – 8526

[19] Rudolph, S. (1998): “On the context of dimensional analysis in artificial intelligence”. *Proceedings of the International Workshop on Similarity Methods* (Universidad de Stuttgart, Alemania) : 147 – 161

[20] Rudolph, S. (2002): *Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen*. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen. Universidad de Stuttgart (Alemania)

[21] Schmidt Castañeda, J.W. ; Sandoval, F.J. & Dorantes González, D.J. (2005): “A comparison and application of pattern recognition techniques in materials selection using dimensionless numbers”. *Proceedings of the 5th International Conference on Technology and Automation (ICTA ’05). Paper nr. 26*

[22] Martínez de Azagra Paredes, A.; Pando Fernández, V.; del Río San José, J. & Navarro Hevia, J. (2006): “Aproximación al conocimiento de la infiltración a través del análisis dimensional”. *Ecología*, 20: 471 – 491

[23] Martínez de Azagra Paredes, A.; Pando Fernández, V. & del Río San José, J. (2007): *Generalizaciones al teorema π de Buckingham con algunas aplicaciones*. Número de Asiento Registral 00 / 2007 / 4703 (solicitud P-12-07) del Registro General de la Propiedad Intelectual. Disponible en http://www.oasificacion.com (22-3-2007 en adelante)

[24] Sheppard, M. (2007): *Systematic search for expressions of dimensionless constants using the NIST database of physical constants.* Disponible en https://www.msu.edu/~sheppa28/constants/constants.html (1-10-2008)